AUFGABENSAMMLUNG
DENKSPORT FÜR DIE UNTERSTUFE

Die Aufgaben in dieser Sammlung sind zwei Erfahrungsstufen zugeordnet:

Stufe I: diese Aufgaben sind besonders gut zum Einstieg geeignet.
Alle Aufgaben dieser Stufe setzen nur mathematische Inhalte bis zur 6. Schulstufe voraus.

Stufe II: diese Aufgaben sind insbesondere für erfahrenere Schüler*innen der Unterstufe gedacht.
Manche Aufgabe dieser Stufe setzen mathematische Inhalte der 7. und 8. Schulstufe voraus.

Die Aufgaben sind innerhalb einer Stufe nicht nach Schwierigkeit sortiert.

Fragen und Feedback per E-Mail sind jederzeit willkommen.

Inhaltsverzeichnis

Datum: 10. Februar 2021.

1. Geometrie

Stufe I.

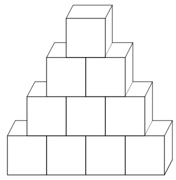
1.1. Ein quaderförmiger Turm besteht aus fünf Würfeln. Der Turm misst die Oberfläche $198\,\text{cm}^2$.

a) Wie hoch ist der Turm?

b) Bei einem kleinen Erdbeben fällt ein Würfel vom Turm herunter. Es bleibt ein quaderförmiger Turm aus vier Würfeln übrig und daneben ein einzelner Würfel. Wie groß ist die Oberfläche dieses kleineren Turms aus vier Würfeln und wie groß ist die Oberfläche des einzelnen Würfels?

1.2. Sascha baut mit dem gesamten Vorrat an würfelförmigen Bausteinen einen Turm. Jede Ebene des Turmes besteht aus einem Baustein weniger als die direkt darunter liegende.

Ein Turm heißt „vollständig“, wenn die oberste Ebene aus nur einem Baustein besteht. Die Figur zeigt einen vollständigen Turm, der aus 10 Bausteinen besteht.



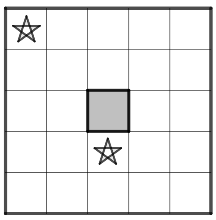
Die oberste Ebene eines (nicht vollständigen) Turmes besteht aus 8, die unterste aus 16 Bausteinen.

a) Sascha möchte aus den Steinen einen möglichst großen vollständigen Turm bauen. Wie viele Bausteine bleiben mindestens übrig?

b) Sascha baut nun einen vollständigen Turm, der aus 12 Ebenen besteht und klebt die Würfelseitenflächen, die einander berühren, zusammen. Um einen einzelnen Würfel anzustreichen, benötigt man 1 ml Farbe. Wie viel ml Farbe benötigt Sascha um den Turm anzustreichen, wenn die Unterseite des Turmes nicht angestrichen werden soll?

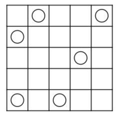
1.3. Ein quadratisches Stück Papier besteht aus 5×5 kleinen Quadraten.

Wie im Bild zu sehen ist, fehlt das mittlere Quadrat. Das Stück Papier soll längs der Rasterlinien in vier deckungsgleiche Stücke zerschnitten werden. Dabei sollen die beiden mit einem Stern markierten kleinen Quadrate zum gleichen Stück gehören. Wie muss das Blatt geschnitten werden?

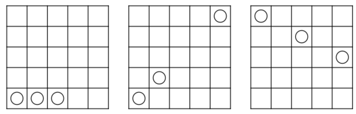


1.4. In die Felder eines $n \times m$ Schachbretts möchte ich so Spielfiguren legen, dass keine drei davon auf einer geraden Linie liegen.

Sie dürfen also z.B. auf ein 5×5 Brett folgendermaßen gelegt werden:

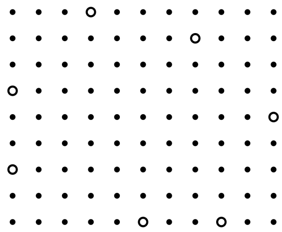


Aber nicht auf die folgenden drei Arten:



a) Wie viel Figuren kann ich höchstens auf ein 3×3 Brett unter diesen Voraussetzungen legen?
b) Wie viele auf ein 3×4 Brett?
c) Wie viele auf ein 4×4 Brett?

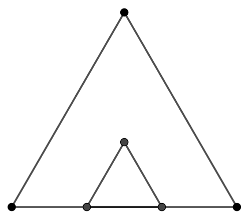
1.5. Auf einem Brett sind Punkte in einem cm-Raster markiert.



In den sieben groß angedeuteten Punkten werden Nägel eingeschlagen, und um diese Nägel wird eine Schnur herum gewickelt. Wie groß ist die von der Schnur begrenzte Fläche?

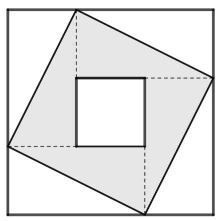
1.6. Gegeben ist ein großes gleichseitiges Dreieck.

In dieses Dreieck wird, wie in der Abbildung zu sehen, ein kleines gleichseitiges Dreieck mit der Fläche $4\,\text{cm}^2$ gezeichnet. Die unteren Eckpunkte des kleinen Dreiecks teilen die untere Seite des großen Dreiecks in drei gleich lange Teile. Wie groß ist die Fläche des großen Dreiecks?



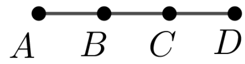
1.7. Gegeben ist ein großes Quadrat mit dem Flächeninhalt $64\,\text{cm}^2$.

Wie in der Zeichnung zu sehen, befindet sich darin ein kleines Quadrat. Dieses hat den Flächeninhalt $25\,\text{cm}^2$. Wie groß ist der Flächeninhalt der grauen Fläche?



1.8. Auf einem Stab sind wie abgebildet Punkte A, B, C und D in regelmäßigen Abständen markiert.

Der Stab wird drei Mal hintereinander um jeweils 180° gedreht, und zwar zuerst um den Punkt B, dann um den Punkt A, und schließlich wieder um den Punkt B.

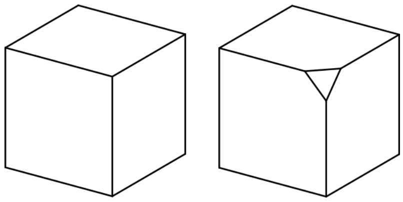


a) Nach diesem Prozess liegt ein Punkt an derselben Stelle wie zu Beginn. Um welchen Punkt handelt es sich?

b) Welcher Punkt ist nach diesem Prozess am weitesten von seiner Ausgangsstellung entfernt?

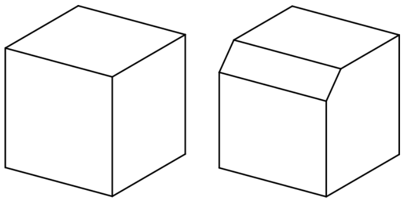
1.9. Wir zählen Eckpunkte.

a) Im linken Bild sehen wir einen Würfel, und im rechten Bild sehen wir, was vom Würfel übrig bleibt, wenn ein kleines Stück an einem Eckpunkt abgeschnitten wird. Es entsteht dabei als Schnittfläche ein kleines Dreieck.



Stellen wir uns vor, wir würden an jedem Eck des Würfels ein solches Stück abschneiden.
Wie viele Eckpunkte hätte dann das Objekt, das nach Entfernung der kleinen Abschnitte übrigbleibt?

b) Im linken Bild sehen wir einen Würfel, und im rechten Bild sehen wir, was von Würfel übrig bleibt, wenn ein kleiner Streifen längs einer Kante abgeschnitten wird.

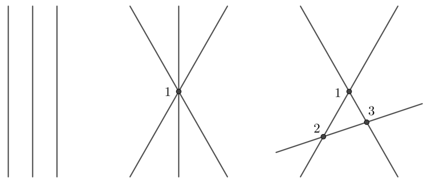


Stellen wir uns vor, wir würden an jeder Kante des Würfels ein solches Stück abschneiden.
Wie viele Eckpunkte hätte dann das Objekt, das nach Entfernung der kleinen Abschnitte übrigbleibt?

Stufe II.

1.10. Eine Anzahl von Geraden bestimmt in der Ebene eine Menge von Schnittpunkten, die jeweils auf mindestens zwei der Geraden liegen.

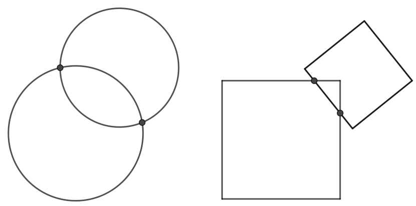
In der Figur sehen wir Gruppen von jeweils drei Geraden, die der Reihe nach 0, 1 und 3 derartige Schnittpunkte bestimmen.



a) Bestimme eine Anordnung von drei Geraden, die genau 2 Schnittpunkte bestimmen.
b) Bestimme Anordnungen von jeweils vier Geraden, die genau 3 bzw. 4 bzw. 5 Schnittpunkte bestimmen.
c) Begründe warum es nicht möglich ist, vier Geraden so anzuordnen, dass sie genau 2 Schnittpunkte bestimmen.
d) Bestimme eine Anordnung von 8 Geraden, die genau 13 Schnittpunkte bestimmen.
e) Bestimme eine Anordnung von 7 Geraden, die genau 9 Schnittpunkte bestimmen.
f) Bestimme Anordnungen von 7 Geraden, die genau 10 bzw. 12 Schnittpunkte bestimmen.
g) Bestimme eine Anordnungen von 7 Geraden, die genau 15 Schnittpunkte bestimmt.
h) Bestimme die größte Anzahl von Schnittpunkten, die von 7 geeignet ausgewählten Geraden bestimmt werden können.

1.11. Geometrische Objekte bestimmen in der Ebene eine Menge von Schnittpunkten, die jeweils auf mindestens zwei der Objekte liegen.

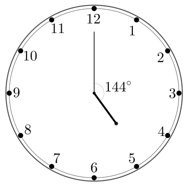
In der Figur sehen wir links zwei Kreise, die sich in zwei Punkten schneiden und rechts zwei Quadrate, die sich ebenfalls in zwei Punkten schneiden.



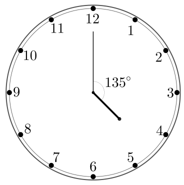
a) Bestimme die größte Anzahl von Schnittpunkten, die ein Kreis mit einem Quadrat haben kann.
b) Offensichtlich können zwei Kreise nicht mehr als zwei Schnittpunkte haben. Bestimme die größte Anzahl von Schnittpunkten, die zwei Quadrate haben können.
c) Ist es möglich, dass zwei Quadrate genau fünf Punkte gemeinsam haben? Wenn ja, bestimme eine solche Konfiguration. Wenn nein, begründe warum dies nicht möglich ist.
d) Insgesamt gibt es in obiger Figur vier Punkte, die jeweils auf mindestens zwei der Objekte liegen. Bestimme eine Konfiguration von zwei Kreisen und zwei Quadraten, in der es genau drei derartige Punkte gibt. Bestimme ferner Konfigurationen, in denen es genau 7 derartige Punkte bzw. genau 11 derartige Punkte gibt.

1.12. Der Minutenzeiger einer Uhr ist vom Ziffernblatt heruntergefallen. Der Stundenzeiger zeigt aber die richtige Zeit an.

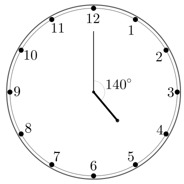
a) Wie spät ist es, wenn der Stundenzeiger wie abgebildet mit der Senkrechten den Winkel 144° einschließt?



b) Wie spät ist es, wenn der Stundenzeiger wie abgebildet mit der Senkrechten den Winkel 135° einschließt?



c) Wie spät ist es, wenn der Stundenzeiger wie abgebildet mit der Senkrechten den Winkel 140° einschließt?



d) Bestimme einen Zeitpunkt, an dem der Minutenzeiger einer Uhr mit dem Stundenzeiger einen Winkel von 60° bzw. 90° bzw. 180° einschließt.

e) Bestimme einen Zeitpunkt, an dem der Minutenzeiger einer Uhr mit dem Stundenzeiger einen Winkel von 45° bzw. 135° einschließt.

f) Der Minutenzeiger einer Uhr schließt mit dem Stundenzeiger zu einem bestimmten Zeitpunkt einen Winkel α ein. Wie viele Minuten vergehen, bis die beiden Zeiger zum nächsten Mal denselben (gerichteten) Winkel α einschließen?

1.13. Um genau Mitternacht, also zum Zeitpunkt 00:00:00, überdecken sich der Stundenzeiger, der Minutenzeiger und der Sekundenzeiger genau alle gegenseitig.

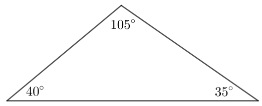
a) Wie viele Sekunden vergehen ab Mitternacht, bis der Sekundenzeiger sich zum ersten Mal wieder genau mit dem Stundenzeiger überdeckt?

b) Wie viele Sekunden vergehen ab Mitternacht, bis der Sekundenzeiger mit dem Minutenzeiger denselben Winkel einschließt wie der Minutenzeiger mit dem Stundenzeiger, nachdem der Sekundenzeiger den Minutenzeiger überholt hat?

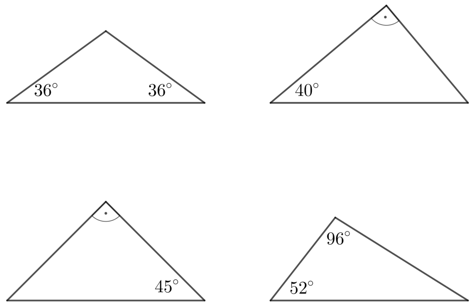
c) Die Zeiger schließen um Mitternacht paarweise einen Winkel von 0° ein. Gibt es einen Zeitpunkt, zu dem die drei Zeiger paarweise einen gleich großen, positiven Winkel miteinander einschließen? Wenn es solche Zeitpunkte gibt, bestimme einen solchen. Wenn es einen solchen nicht gibt, begründe, warum es ihn nicht geben kann.

1.14. Wir zerteilen allgemeine Dreiecke in gleichschenkelige Dreiecke.

a) Zerteile das gegebene Dreieck durch eine Strecke in zwei gleichschenkelige Dreiecke.

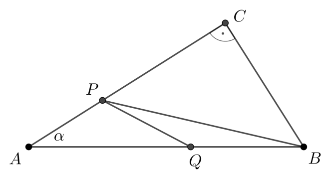


b) Welche der rechts abgebildeten Dreiecke können durch jeweils eine einzige Strecke in zwei gleichschenkelige Dreiecke geteilt werden?

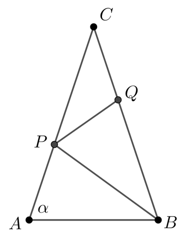


1.15.

a) In der (nicht im Maßstab gezeichneten) Figur sehen wir ein rechtwinkeliges Dreieck ABC, das durch Punkte P und Q auf den Seiten AC bzw. AB in drei gleichschenkelige Dreiecke zerteilt wird, mit $AP = PQ = QB$ und $CB = CP$. Bestimme den Winkel α.



b) In der nicht im Maßstab gezeichneten Figur sehen wir ein gleichschenkeliges Dreieck ABC mit $AC = BC$, das durch Punkte P und Q auf den Seiten AC bzw. BC in drei gleichschenkelige Dreiecke zerteilt wird, mit $AB = BP = BQ$ und $QP = QC$. Bestimme den Winkel $\alpha = \angle BAC$.



1.16. Ein Quadrat kann durch Strecken in n gleichschenkelige Dreiecke geteilt werden. Bestimme alle möglichen Werte von n.

1.17. Wir zerteilen Polygone (d.h. Vielecke) in gleichschenkelige Dreiecke.

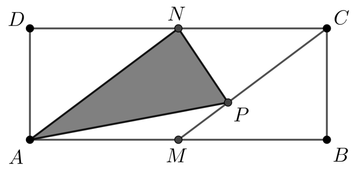
a) Gegeben sei ein rechtwinkeliges Dreieck ABC. Beweise, dass man ABC unabhängig von seinen Innenwinkeln durch eine einzige Strecke in zwei gleichschenkelige Dreiecke teilen kann.

b) Gegeben sei ein spitzwinkeliges Dreieck ABC. Beweise, dass man ABC unabhängig von seinen Innenwinkeln durch Strecken in drei gleichschenkelige Dreiecke teilen kann.

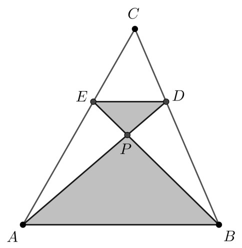
c) Im Viereck $ABCD$ kennt man die vier Innenwinkel $\angle CBA = 80°$, $\angle DCB = 90°$, $\angle ADC = 100°$ und $\angle BAD = 90°$. Zeige, dass man das Viereck durch geeignete Strecken in vier gleichschenkelige Dreiecke zerteilen kann.

1.18. Gegeben ist ein Rechteck $ABCD$ mit $AB = 8\,\text{cm}$ und $BC = 3\,\text{cm}$.

Die Punkte M bzw. N halbieren die langen Seiten AB bzw. CD.
Der Punkt P teilt die Strecke MC im Verhältnis $1 : 2$.
Bestimme die Fläche des Dreiecks ANP.



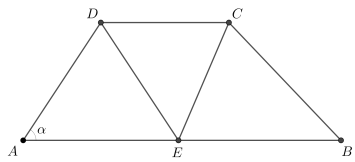
1.19. Im Dreieck ABC liegen Punkte D auf BC und E auf CA mit $AB \parallel DE$.



Der Punkt P ist der Schnittpunkt von BE mit AD. Wir kennen die Dreiecksflächen $(ABP) = 25\,\text{cm}^2$ und $(DEP) = 9\,\text{cm}^2$. Bestimme die Fläche (ABC).

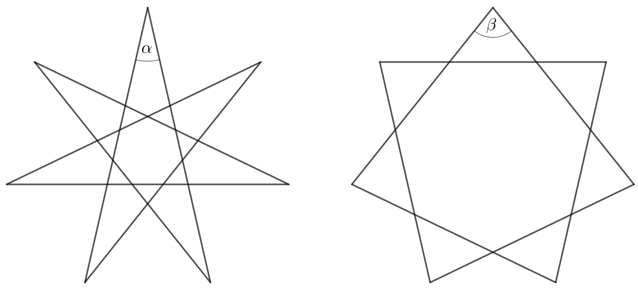
1.20. Gegeben ist ein Trapez $ABCD$ mit $AB \parallel CD$ und $AB > CD$.

Der Punkt E liegt so auf der Seite AB, dass $AD = DE$, $CD = CE$ und $BC = BE$ gilt. Ferner ist $\angle BCD$ um ein Drittel größer als der Winkel $\alpha = \angle DAE$.
Bestimme den Wert von α.



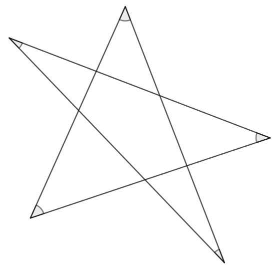
1.21.

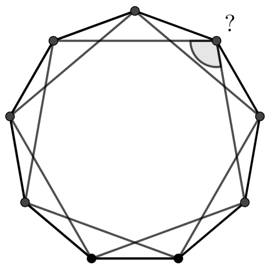
a) In der folgenden Abbildung sieht man die beiden möglichen regelmäßigen, siebenseitigen Sterne. In jedem Stern sind die Seiten jeweils gleich lang.



Um wie viel Grad ist der Winkel β größer als der Winkel α?

b) In der Abbildung sehen wir einen allgemeinen fünfzackigen Stern. Beweise, dass die Summe der fünf angedeuteten Winkel in den Spitzen in jedem derartigen Stern gleich ist, und bestimme den Wert dieser Summe.

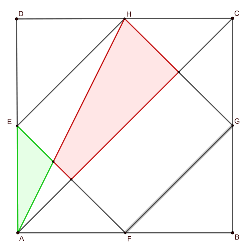




c) In einem regelmäßigen Neuneck wird, wie im Bild zu sehen, jeder zweiter Eckpunkt durch eine Strecke verbunden.
Wie groß ist der angedeutete Winkel?

1.22. Das Quadrat $ABCD$ hat Fläche 1.

Die Punkte E, F, G und H sind jeweils die Mittelpunkte von DA, AB, BC und CD.
Berechne die Differenz der Flächeninhalte der roten Fläche und der grünen Fläche.



2. Zahlentheorie

Stufe I.

2.1. Wir bezeichnen eine Zahl, in der die Ziffern von links nach rechts immer größer werden als *wachsend*. Beispiele für wachsende Zahlen sind 12, 349 und 2358.

Bestimme die größte und kleinste wachsende vierziffrige Zahl, die jeweils durch 6 teilbar ist.

2.2. In einem 99-stöckigen Hochhaus gibt es mehrere Wohnungen, und zwar in jedem Stock genau neun. Jede Wohnung hat eine drei-ziffrige Nummer, wobei die letzten beiden Ziffern das Stockwerk angeben. So ist die Wohnung 312 die dritte Wohnung im 12. Stock und die Wohnung 602 die sechste in zweiten Stock.

a) Flip und Flop wohnen in zwei verschiedenen Wohnungen, deren Nummern beide durch neun teilbar sind. Wie viele Stockwerke wohnen die beiden mindestens auseinander? Wieviele höchstens?

b) Blip und Blop wohnen in zwei anderen Wohnungen desselben Hochhauses. Die Nummern ihrer Wohnungen werden beide mit denselben drei verschiedenen Ziffern geschrieben, wobei ihre Wohnungsnummern ebenfalls beide durch 9 teilbar sind. Wie viele Stockwerke wohnen diese beiden mindestens auseinander? Wieviele höchstens?

Gib in jedem Fall mögliche Wohnungsnummern der Paare an.

2.3. Leo und Maxi bekommen Taschengeld.

a) Ein ganzes Monat lang bekommen Leo und Maxi täglich jeweils eine Münze. Vor Beginn des Monats hat Maxi bereits 36 Münzen angespart, Leo hat keine Münze.
An wie vielen Tagen ist die Anzahl von Leos Münzen ein Teiler der Anzahl von Maxis Münzen?

b) Zu einem anderen Zeitpunkt bekommt Leo ein Monat lang täglich eine Münze und Maxi täglich zwei Münzen. Vor Beginn des Monats hat Leo 36 Münzen angespart, Maxi besitzt keine Münze.
An wie vielen Tagen ist die Anzahl von Maxis Münzen ein Teiler von der Anzahl von Leos Münzen?

2.4. Toni kauft für ein großes Fest 55 Kisten mit Feinschmeckerpralinen. Um den Einkauf mit der Organisation abzurechnen, muss der Preis pro Kiste angegeben werden. Leider sind auf der Rechnung sowohl die erste als auch die letzte Ziffer unleserlich, der Betrag ist $*33,9*$ €. (Die unleserlichen Ziffern sind mit einem „$*$“ markiert.)

Toni weiß, dass eine Kiste mehr als 15 € gekostet hat, aber leider nicht mehr den genauen Betrag. Wie teuer war eine Kiste Feinschmeckerpralinen?

2.5. Es gilt für eine Zahl n:

$$n \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n = 1\,252\,332\,576$$

Wie groß ist n?

2.6. Im Jahr 2020 macht man sich viele Gedanken über die Zahl 20. Finn hat alle natürlichen Zahlen von 1 bis 20 miteinander multipliziert, also

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot 19 \cdot 20$$

ausgerechnet. Die letzten Ziffern im Ergebnis dieser Rechnung waren dann besonders auffällig.

Was ist die Summe der letzten vier Ziffern der großen Zahl, die Finn ausgerechnet hat?

2.7. Aus den Ziffern 2, 3, 4, 5 und 6 werden Zahlen gebildet, wobei jede Ziffer in jeder Zahl genau einmal verwendet werden soll. Bestimme alle derartige Zahlen mit folgender Eigenschaft: Die erste Ziffer ist durch 1 teilbar, die ersten 2 Ziffern bilden eine durch 2 teilbare Zahl, die ersten 3 Ziffern bilden eine durch 3 teilbare Zahl, die ersten 4 Ziffern bilden eine durch 4 teilbare Zahl, und alle 5 Ziffern bilden eine durch 5 teilbare Zahl.

Stufe II.

2.8. Bestimme die kleinste natürliche Zahl, die man mit der Zahl 121 multiplizieren kann, um eine Ergebnis mit den letzten vier Ziffern 1234 zu erhalten.

2.9. Im Folgenden schreiben wir Zahlen mit den Ziffern a und b in der Form $\overline{aaba}$. Für $a = 3$ und $b = 7$ bedeutet also der Ausdruck $\overline{aaba}$ die Zahl 3373.

Bestimme von Null verschiedene Ziffern a und b so, dass die Zahl $\overline{ba}$ ein Teiler der Zahl $\overline{aba}$ ist.

2.10.

a) In der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl A kommen je 2019 mal die Ziffern 2,0,1 und 9 vor. Die übrigen Ziffern kommen nicht vor. Wenn wir statt der Zahl A ihre Ziffernsumme (Quersumme) anschreiben, dann statt dieser neuen Zahl wieder ihre Ziffernsumme anschreiben und diesen Vorgang möglichst viele Male wiederholen, welche einstellige Zahl erhalten wir?

b) Welche Eigenschaft der Zahl A führt dazu, dass du genau diese einstellige Zahl als Ergebnis erhalten hast? Hinweis: Welche Teilerregeln kennst du?

c) Erfinde eine ähnliche Aufgabe, die zur selben Lösungszahl führt.

2.11. Wir betrachten positive Zahlen, die durch Reste bei Divisionen durch bestimmte Zahlen beschrieben werden.

Gesucht sind Zahlen,

a) die bei Divsion durch 2 den Rest 1 lassen und bei Division durch 3 den Rest 2.
  i) Bestimme zwei derartige Zahlen.
  ii) Bestimme einen algebraischen Ausdruck, der unendlich viele derartige Zahlen festlegt.

b) die bei Divsion durch 4 den Rest 3 lassen und bei Division durch 8 den Rest 6. Begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.

c) die bei Divsion durch 4 den Rest 3 lassen und bei Division durch 8 den Rest 5. Gibt es derartige Zahlen? Wenn ja, bestimme die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.

d) die bei Divsion durch 6 den Rest 4 lassen und bei Division durch 9 den Rest 5. Gibt es derartige Zahlen? Wenn ja, bestimme die kleinste Zahl mit dieser Eigenschaft. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.

Bestimme für die nun folgenden Teilaufgaben **e)** – **h)** jeweils
 i) die kleinste Zahl mit der gesuchten Eigenschaft und
 ii) einen algebraischen Ausdruck, der alle derartige Zahlen festlegt.

Gesucht sind Zahlen,

e) die bei Divsion durch 3 den Rest 2 lassen, bei Division durch 5 den Rest 3 und bei Division durch 7 den Rest 5.

f) die sowohl bei Division durch 3 als auch durch 7 den Rest 2 lassen, bei Division durch 5 aber den Rest 4.

g) die bei Division durch 3 den Rest 1, bei Division durch 5 den Rest 3 und bei Division durch 7 den Rest 5 lassen.

h) die bei Divsion durch 8 den Rest 7 lassen, bei Division durch 10 den Rest 1 und bei Division durch 12 wieder den Rest 7.

2.12. Wir sagen, dass drei paarweise verschiedene positive ganze Zahlen einen *Klub* bilden, wenn jede der drei Zahlen die Summe der übrigen beiden Zahlen teilt. So bilden beispielsweise die Zahlen 2, 4 und 6 einen Klub, weil $2 \mid (4+6)$, $4 \mid (2+6)$ und $6 \mid (2+4)$ gilt.

a) Bestimme alle Zahlen, die mit 10 und 20 einen Klub bilden.

b) Bestimme alle Zahlen, die mit den beiden Zahlen 8 und 12 gemeinsam einen Klub bilden und begründe, warum es keine weiteren geben kann.

c) Begründe, warum es keine Zahl geben kann, die mit 16 und 20 einen Klub bildet.

d) Begründe, warum es unendlich viele Zahlenklubs gibt.

2.13. Im fernen Mathematistan verwendet man die Währung *Mathestan* (mit dem Symbol M̶). Ein M̶ besteht aus unerfindlichen Gründen aus 90 *Nents* (mit dem Symbol n̶). Es gilt also 1 M̶ = 90 n̶. Aus traditionellen Gründen gibt es Münzen im Nennwert von 3 n̶, 6 n̶, 10 n̶, 25 n̶, 45 n̶ und 1 M̶.

Einige Beträge kann man (ohne Wechselgeld) gar nicht bezahlen, wie z.B. 2 n̶ oder 11 n̶. Einige kann man nur auf eine Art bezahlen, wie z.B. 10 n̶. Andere wiederum kann man auf mehrere Arten bezahlen, wie z.B. 18 n̶ (mit drei 6 n̶ Münzen oder mit sechs 3 n̶ Münzen).

a) Bestimme den größten Betrag, den man in Mathestan nicht mit Münzen exakt zahlen kann.
b) Bestimme den größten Betrag, den man auf genau eine Art bezahlen kann.

2.14. Die *Happyfunktion* h wird für positive ganze Zahlen n folgendermaßen definiert. Der Wert von $h(n)$ ist die Summe der Quadrate der Ziffern von n. Beispiele dafür sind

$$h(21) = 2^2 + 1^2 = 5, \quad h(503) = 5^2 + 0^2 + 3^2 = 34 \quad \text{und} \quad h(1000) = 1^2 + 0^2 + 0^2 + 0^2 = 1.$$

Man kann die Happyfunktion auf eine Zahl mehrmals hintereinander anwenden, und bekommt so eine Folge von Zahlen. Ein Beispiel dafür ist

$$26 \mapsto h(26) = 2^2 + 6^2 = 40 \mapsto h(40) = 4^2 + 0^2 = 16 \mapsto h(16) = 1^2 + 6^2 = 37, \quad \text{usw.}$$

Führt eine derartige Folge irgendwann zur Zahl 1 (so wie z.B. für die Zahl 1000), so ändert sich der Wert nie mehr, da $h(1) = 1^2 = 1$ gilt. Man bezeichnet eine Zahl, die irgendwann bei wiederholter Anwendung der Happyfunktion zur Zahl 1 führt als „*Happy Number*“ (= fröhliche Zahl).

a) Die Zahl 1 ist nicht die einzige einziffrige Happy Number. Bestimme die andere.
b) Es gibt neben 1 noch eine einziffrige Zahl w mit der Eigenschaft, dass mehrmalige Anwendung der Happyfunktion wieder zurück zur Zahl w führt. Bestimme diese Zahl w.
c) Man kann leicht wegen $h(13) = 1^2 + 3^2 = 10$ nachweisen, dass 13 eine Happy Number ist. Schreibe ohne weitere Rechnungen durchzuführen mindestens vier weitere Happy Numbers an.
d) Es gibt genau eine zweiziffrige Happy Number, deren Ziffern beide gleich sind. Bestimme diese Zahl.
e) Es gibt genau eine dreiziffrige Happy Number, deren Ziffern alle gleich sind. Bestimme diese Zahl.
f) Bestimme die kleinste Primzahl p_k, für die auch $h(p_k)$ eine Primzahl ist. Bestimme auch die kleinste Primzahl p_u, für die $h(p_u)$ eine ungerade Primzahl ist.

2.15. Zur Erinnerung: Jede (positive ganze) Zahl ist ihr eigener größter Teiler und 1 ist der kleinste Teiler jeder Zahl. Hat eine Zahl genau diese zwei Teiler, so bezeichnen wir die Zahl als eine *Primzahl.* Teiler einer Zahl, die weder mit der Zahl selbst identisch sind, noch gleich 1, bezeichnet man als *echte Teiler* der Zahl.

a) Bestimme alle Zahlen, deren drittgrößter Teiler die Zahl 8 ist.
b) Bestimme alle Zahlen, deren drittgrößter Teiler die Zahl 10 ist.
c) Bestimme alle Zahlen, deren drittgrößter Teiler die Zahl 77 ist.
d) **i)** Gibt es eine Kubikzahl, deren drittgrößter Teiler eine Quadratzahl ist? Wenn ja, bestimme eine solche. Wenn nein, begründe warum es sie nicht geben kann.
ii) Gibt es eine Quadratzahl, deren drittgrößter Teiler eine Kubikzahl ist? Wenn ja, bestimme eine solche. Wenn nein, begründe warum es sie nicht geben kann.
e) **i)** Bestimme eine Quadratzahl mit der Ziffernsumme 1, deren drittgrößter Teiler ebenfalls eine Quadratzahl ist.
ii) Gibt es mehr als eine Zahl mit dieser Eigenschaft?
f) **i)** Gibt es eine Zahl mit Ziffernsumme 9, deren drittgrößter Teiler genau ein Viertel so groß ist, wie die Zahl selbst? Wenn ja, bestimme die kleinste derartige Zahl. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.
ii) Gibt es eine Zahl mit Ziffernsumme 7, deren drittgrößter Teiler genau ein Fünftel so groß ist, wie die Zahl selbst? Wenn ja, bestimme eine derartige Zahl. Wenn nein, begründe warum es keine derartige Zahl geben kann.
g) **i)** Bestimme drei gerade Quadratzahlen, deren drittgrößte Teiler jeweils ungerade sind.
ii) Beweise, dass es keine gerade Kubikzahl gibt, deren drittgrößter Teiler ungerade ist.
h) Kann der drittgrößte Teiler d des drittgrößten Teilers t einer gegebenen Zahl n der
i) viertgrößte **ii)** fünftgrößte **iii)** sechstgrößte
Teiler von n sein? Bestimme jeweils ein Beispiel für jeden dieser Fälle, wenn es ein derartiges n gibt bzw. begründe, warum es keines geben kann, wenn es ihn nicht gibt.

2.16.

a) In der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl A kommt vier mal die Ziffer 2, vier mal die Ziffer 0, vier mal die Ziffer 1 und vier mal die Ziffer 9 vor. Die übrigen Ziffern kommen nicht vor.
Kann A eine Quadratzahl sein?
b) In der Dezimaldarstellung der natürlichen Zahl B kommt ein mal die Ziffer 2, zehn mal die Ziffer 0, hundert mal die Ziffer 1 und tausend mal die Ziffer 9 vor. Die übrigen Ziffern kommen nicht vor.
Kann B eine Quadratzahl sein?
c) Finde das allgemeine Prinzip, das der Lösung der beiden vorherigen Teilaufgaben zugrunde liegt.
d) Erstelle unter Nutzung dieses Prinzips eine eigene Aufgabe.

2.17. Wie so oft macht man sich Gedanken über die aktuellen Jahreszahlen.
Ist das Produkt

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 2020$$

öfter hintereinander ohne Rest durch 2020 oder durch 2021 teilbar?

2.18. In dieser Aufgaben beschäftigen wir uns mit Summen von Quadratzahlen.

a) Auf wie viele Arten kann man die Zahl 10 als Summe von Quadratzahlen schreiben?

b) Wie viele der Zahlen von 1 bis 25 kann man als Summe von zwei Quadratzahlen schreiben?

c) Die Jahreszahl 2020 lässt sich als die Summe von den Quadraten von vier aufeinanderfolgenden Primzahlen als

$$2020 = 17^2 + 19^2 + 23^2 + 29^2 = 289 + 361 + 529 + 841$$

schreiben. Bestimme eine weitere Möglichkeit, die Zahl 2020 als Summe von Quadratzahlen (mit möglichst wenig Summanden) zu schreiben.

d) **i)** Was ist nach 2020 die nächste Jahreszahl, die man als Summe der Quadrate zweier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen schreiben kann?

ii) Was ist nach 2020 die nächste Jahreszahl, die man als Summe der Quadrate dreier aufeinanderfolgender ganzer Zahlen schreiben kann?

e) Bestimme alle Paare von Quadratzahlen, deren Differenz 341 ist.

f) Die Zahl 26 kann in der Form

$$26 = 25 + 1 = 5^2 + 1^2$$

als Summe zweier Quadratzahlen geschrieben werden. Begründe warum 26 nicht als Differenz zweier Quadratzahlen geschrieben werden kann.

2.19. a) Gegeben sei der Bruchterm $T(x) = \frac{x+5}{x-5}$. Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T(x)$ eine ganze Zahl ist.

b) Gegeben sei der Bruchterm $T(x) = \frac{3x^2-3x-6}{x^2-x}$. Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T(x)$ eine ganze Zahl ist.

c) Gegeben sei der Bruchterm $T(x) = \frac{x^2+4x-17}{x-3}$. Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T(x)$ eine ganze Zahl ist.

d) Gegeben seien die Bruchterme $T_1(x) = \frac{3}{x+3}$ und $T_2(x) = \frac{5}{4\cdot(2x+3)}$.

i) Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T_1(x)$ eine ganze Zahl ist.

ii) Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T_2(x)$ eine ganze Zahl ist.

iii) Bestimme alle ganzen Zahlen x, für die $T_1(x) + T_2(x)$ eine ganze Zahl ist.

3. Rechnen

Stufe I.

3.1. Mein Onkel wollte eine ganze Zahl mit 403 multiplizieren, vergaß aber seine Brille aufzusetzen, und hat irrtümlich mit 93 multipliziert, weil er die Ziffer 4 übersehen hat, und die Ziffer 0 für eine 9 gehalten hat. Sein Ergebnis dabei war 5301. Welches Ergebnis hätte er bekommen sollen?

3.2. Von drei natürlichen Zahlen a, b und c kennt man die Produkte von je zwei:

$$a \cdot b = 15 \quad b \cdot c = 18 \quad c \cdot a = 30.$$

Bestimme die Summe $a + b + c$ der drei Zahlen.

3.3. Von den folgenden sechs Rechnungen ist genau eine richtig.

$$22^2 + 11^2 = 2211 \quad 44^2 + 55^2 = 4455 \quad 77^2 + 11^2 = 7711$$

$$88^2 + 33^2 = 8833 \quad 99^2 + 22^2 = 9922 \quad 66^2 + 44^2 = 6644$$

Wenn man das weiß, ist es nicht notwendig alle auszurechnen, um festzustellen, welche die richtige Rechnung ist.

a) Wie kann man da vorgehen?
b) Welche Rechnung ist die richtige?

3.4. Zu einer erdachten Zahl addieren wir zunächst die Zahl 12 und multiplizieren das Ergebnis mit der Zahl 4. Anschließend subtrahieren wir hiervon die Zahl 5 und dividieren das Ergebnis durch die Zahl 7. Wir erhalten als ganzzahligen Quotienten die Zahl 22 und den Rest 1.

a) Bestimme die erdachte Zahl.
b) Welches Ergebnis erhältst du, wenn du die beiden Ziffern der Zahl vertauscht und dieselbe Rechenvorschrift durchführst?
c) Finde ein weiteres Paar zweistelliger Zahlen, bei der du bei einer der Zahlen nach dem Ausführen der Rechenvorschrift als Ergebnis eine ganze Zahl ohne Rest erhältst. Vertauscht du jedoch die beiden Ziffern, so erhältst du einen ganzzahligen Quotienten und den Rest 1.

3.5. Bei der Multiplikation

$$3\square\square \cdot 4\square = 1\square83\square$$

einer dreistelligen mit einer zweistelligen Zahl erhält man ein fünfstelliges Ergebnis. In jedem Kästchen steht dieselbe Ziffer. Um welche Ziffer handelt es sich?

3.6. In der 1a und der 1b der Eulerschule gibt es gleich viele Kinder. In der 1a spielt ein Viertel das neue Spiel *Viertnacht*. In der 1b sind es doppelt so viele. Insgesamt 30 Kinder in den beiden Klassen spielen das Spiel nicht. Wie viele Kinder sind in jeder Klasse?

3.7. Addiert man 6 zu einer Zahl erhält man dasselbe Ergebnis, wie wenn man dieselbe Zahl mit 6 multipliziert. Um welche Zahl handelt es sich? (Achtung: Es ist keine ganze Zahl!)

3.8. Dana hat neun zwei-Euro Münzen und Dima hat vier fünf-Euro Scheine.
Wie viele Münzen muss Dana Dima geben und wie viele Scheine muss Dima Dana geben, damit sie beide gleich viel Geld haben? Gib dafür alle Möglichkeiten an.

3.9. Das Durchschnittsalter der elf Spielerinnen, die gerade am Feld für den Sportverein Euler gegen den Sportklub Fermat spielen, beträgt genau 22 Jahre. Ihr größter Star, Antonia Gauss, muss wegen einer Verletzung gegen ihre Rivalin Jojo Bernoulli ausgetauscht werden. Plötzlich steigt das Durchschnittsalter der aktiven Spielerinnen des Teams auf 23 Jahre.
Um wie viele Jahre ist Jojo älter als Antonia?

3.10. In der Entbindungsstation war heute viel los. Es sind gleich 5 Babies zur Welt gekommen. Davon haben zwei ein Gewicht von je 3 kg, zwei ein Gewicht von je 3,5 kg, und eines ein Gewicht, das um 1 kg mehr als das Durchschnittsgewicht von allen fünf ist.
Wieviel wiegt das fünfte Baby?

3.11. Ein Ausschnitt einer Multiplikationstabelle sieht folgendermaßen aus:

$\cdot$	**4**	**5**
6	24	30
7	28	35

Vervollständige die fehlenden natürlichen Zahlen in den folgenden Ausschnitten der Tabelle:

$\cdot$		
	15	20
	24	

$\cdot$	$x > 1$	**8**
	49	
	63	

$\cdot$	$1 < x < 10$	**12**
11		
	104	

3.12. Auf der Zahlengeraden sind die beiden Punkte $\frac{1}{4}$ und 0,7 markiert. Die Strecke zwischen diesen beiden Punkten soll in

a) zwei **b)** drei **c)** vier **d)** fünf

gleich lange Teile geteilt werden.
Welche Zahl befindet sich jeweils bei der Markierung unmittelbar rechts von der Zahl $\frac{1}{4}$?

3.13. Ein leeres Schwimmbecken wird bei voll aufgedrehtem Zufluss in acht Stunden komplett gefüllt. Wird der Abfluss vollständig geöffnet, dauert es zwölf Stunden bis das volle Becken vollkommen entleert wird. Irrtümlich lässt der Badewärter beim leeren Becken Zufluss und Abfluss beide ganz offen. Wie lange dauert es, bis das Becken voll ist?

3.14. Die Summe von zwei Zahlen ist um 10 größer als die Differenz der beiden Zahlen. Die Summe der beiden Zahlen ist außerdem um ein Drittel größer als ihre Differenz. Wie lauten die beiden Zahlen?

3.15. Wir dividieren zweistellige Zahlen durch ihre Ziffernsumme.

a) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit Zehnerziffer 5 durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als ganzzahligen Quotienten 4 und den Rest 6. Bestimme die Einerziffer der Zahl.
b) Dividiert man eine zweistellige Zahl durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als ganzzahligen Quotienten 3 und den 2 Rest. Bestimme die zweistellige Zahl.
c) Dividiert man eine zweistellige Zahl mit Einerstelle 3 durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als ganzzahligen Quotienten 5 und einen unbekannten Rest. Bestimme die Zehnerziffer der Zahl und den Rest.
d) Dividiert man eine zweistellige Zahl durch ihre Ziffernsumme, so erhält man als ganzzahligen Quotienten 9 und einen Rest, der nicht Null ist. Bestimme die zweistellige Zahl.
e) Die Zehnerziffer einer zweiziffrigen Zahl stimme mit der Einerziffer überein. Zeige, dass dann der ganzzahlige Quotient bei Division der Zahl durch ihre Ziffernsumme stets 5 ist. Was fällt dir beim Rest auf?
f) Der ganzzahlige Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei 8, der Rest unbekannt. Bestimme alle möglichen Zahlen!
g) Der ganzzahlige Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei gleich groß wie die Zehnerziffer, der Rest sei gleich groß wie die Einerziffer. Bestimme alle möglichen Zahlen mit dieser Eigenschaft.
h) Der ganzzahlige Quotient bei der Division einer zweistelligen Zahl durch ihre Ziffernsumme sei gleich groß wie die Einerziffer, der Rest sei gleich groß wie die Zehnerziffer. Bestimme alle möglichen Zahlen mit dieser Eigenschaft.

Stufe II.

3.16. Unter einer *Sterndl-Null* Aufgabe verstehen wir eine Rechnung mit ganzen Zahlen, in der nur die Ziffern Null gegeben sind. Für alle übrigen Stellen sind Platzhalter gegeben, wobei alle Sterne durch die gleich Ziffer ersetzt werden. Diese Ziffer kommt, ebenso wie die Ziffer 0, an keiner weiteren Stelle vor. Die Aufgabe besteht darin, die Rechnung zu rekonstruieren. Zum Beispiel erhalten wir als Lösung der Aufgabe $\star\star\star \cdot \star 0 = \star\star\star 0$ die Rechnung $111 \cdot 10 = 1110$.

(Vorsicht: Die unbekannten Ziffern, die sich hinter Kästchen verstecken, können gleich oder verschieden sein! Sie sind aber sicher nicht gleich 0, und auch nicht gleich der $\star$ -Ziffer.)

Welche Rechnung verbirgt sich jeweils im folgenden Ausdruck?

a)

$$\square\,\star \cdot \square = \star\,0\ ?$$

b)

$$\square\,\star\,\star + \square\,\star = \square\,0\,\star\,0\ ?$$

c)

$$\square \cdot \star\,\square = \star\,0\,0\ ?$$

d)

$$\star\,0\,\star\,0\ :\ \square\,\star = \square\,0\,\square\ ?$$

e)

$$\star\,\star\,0 - \star\,\star = \square\,\square\ ?$$

f)

$$\star\,0 + \star\,\star + \square\,0 = \star\,\star\,\star\ ?$$

g)

$$\star + \star\,\square + \star\,\square\,\square + \square\,\square\,\square\,\star = \star\,0\,\square\,\star\,0\ ?$$

3.17. Eine frische Zitrone besteht zu 98 % aus Wasser. Nachdem sie einige Zeit in der Sonne liegt, trocknet sie aus, und besteht nur mehr zu 97 % aus Wasser, die Masse der anderen Bestandteile verändert sich nicht.
Um wie viel Prozent mehr wiegt die frische Zitrone als die ausgetrocknete?
(*Hinweis*: Es ist interessant, das Ergebnis zuerst ohne Rechnung zu erraten zu versuchen, und dann mit dem errechneten Ergebnis zu vergleichen. Die meisten Leute verschätzen sich bei derartigen Aufgaben gewaltig!)

3.18. Bei folgender Multiplikation sind einige Ziffern nicht mehr erkennbar. Die Sterne stehen als Platzhalter für beliebige Ziffern, die gleich oder verschieden sein dürfen.

$$
\begin{array}{ccccccc}
3 & * & * & \cdot & * & * & 3 \\
\hline
* & 1 & * & & & & \\
* & 1 & * & * & & & \\
 & * & * & * & 8 & & \\
\hline
* & * & * & * & * & &
\end{array}
$$

a) Kannst du die Rechnung wiederherstellen?

b) Gibt es dafür mehrere Lösungen?

3.19. Ein *Kryptogramm* ist eine Rechnung in der die Ziffern durch Buchstaben oder sonstige Platzhalter ersetzt worden sind. Gleiche Buchstaben stehen immer für gleiche Ziffern und verschiedene Buchstaben stehen immer für verschiedene Ziffern. Die Leitziffer (also die erste Ziffer) einer mehrziffrigen Zahl darf niemals 0 sein.

a) Bestimme die Ziffern, die folgendes Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\
+ & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{B} & \mathrm{D} \\
\hline
 & \mathrm{A} & \mathrm{E} & \mathrm{E} & \mathrm{E}
\end{array}
$$

b) Bestimme alle Möglichkeiten für Ziffern, die folgendes Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen, wenn bekannt ist, dass $H + 1 = C$ gilt und A größer als B ist und G ungerade ist:

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\
+ & \mathrm{C} & \mathrm{D} & \mathrm{A} & \mathrm{B} \\
\hline
 & \mathrm{E} & \mathrm{F} & \mathrm{G} & \mathrm{H}
\end{array}
$$

c) In folgendem Kryptrogramm stehen die Sterne als Platzhalter für beliebige Ziffern, die gleich oder verschieden sein dürfen. Bestimme alle Möglichkeiten für Ziffern, die das Kryptogramm zu einer richtigen Rechnung machen.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \star & \star \\
+ & \mathrm{A} & \mathrm{B} & \star & \star \\
\hline
 & \mathrm{B} & \mathrm{C} & \mathrm{B} & \mathrm{A}
\end{array}
$$

d) In folgendem Kryptrogramm kommt jede der zehn Ziffern von 0 bis 9 genau ein Mal vor. Die Position der Ziffer 2 in der Rechnung ist vorgegeben. Welche Ziffer kommt an die Stelle, die mit dem X gekennzeichnet ist?

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & 2 & ? \\
+ & ? & ? & ? & ? \\
\hline
 & \mathrm{X} & ? & ? & ?
\end{array}
$$

3.20. Kim möchte ein Auto kaufen, und kann sich nur schwer zwischen zwei Modellen entscheiden. Für einen Honota Superexploder müsste Kim aufgrund eines Sonderangebots nur 85 % des Normalpreises zahlen, und für einen Forpel Lautrauscher würde Kim nur 90 % des Normalpreises zahlen, weil Kims bester Freund für die Firma arbeitet. In beiden Fällen wäre der Betrag, den sich Kim vom Normalpreis ersparen würde, gleich groß.
Um wie viel Prozent ist der Superexploder im Normalpreis billiger als der Lautrauscher im Normalpreis?

3.21. Die erste Seite eines Buches ist mit der Ziffer 1 beschriftet, danach ist jede Seite mit der nächstgrößeren ganzen Zahl beschriftet. Die Ziffer 5 wird zum Beschriften 76 mal verwendet, keine der übrigen Ziffern wird genau 76 mal verwendet.
Wie viele Ziffern werden insgesamt zur Beschriftung der Seitenzahlen verwendet?

3.22. In der Region Heustetten haben sich die Landwirte zu einer Kooperative zusammengeschlossen. Gemeinsam stehen ihnen dadurch mehrere Mähdrescher zur Ernte zur Verfügung.

a) Im den letzten beiden Jahren standen dem Martinshof die Mähdrescher B und D zur Verfügung. Vor zwei Jahren fiel die Maschine B wegen einer Wartung kurz aus, und die gesamte Ernte gelang, indem Maschine B 6 Tage eingesetzt wurde und Maschine D 8 Tage. Im Vorjahr war es umgekehrt. Maschine D musste kurz gewartet werden, und die gesamte Ernte gelang, indem Maschine B 7 Tage eingesetzt wurde und Maschine D 6 Tage. In diesem Jahr stehen wieder dieselben Geräte zur Verfügung, aber beide sind frisch gewartet und man erwartet keinen Ausfall in der Erntezeit.
Wie viele Tage werden beide Maschinen gemeinsam für die Ernte voraussichtlich benötigen?

b) Innerhalb der nächsten zwei Tage soll die Ernte am Hubertushof eingebracht werden. Am ersten Tag stehen die Maschinen A und B zur Verfügung, und man weiß aus Erfahrung, dass man den ganzen Hubertushof mit der Maschine A allein in genau 4 Tagen abarbeiten kann, oder aber mit der leistungschwächeren Maschine B allein in 12 Tagen. Glücklicherweise steht am zweiten Tag auch die Maschine C zur Verfügung, und man schafft es gerade am Ende des zweiten Tages unter Einsatz aller drei Maschinen fertig zu werden.
Wie viele Tage würde die Maschine C allein benötigen, um die Ernte am Hubertushof einzubringen?

c) Heute soll die Ernte am Heidihof eingebracht werden. Dazu stehen die drei Maschinen A, D und E den ganzen Tag zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass es sich mit diesen drei Maschinen zusammen genau mit einem ganztägigen Einsatz ausgehen wird, alles zu erledigen. Man weiß auch, dass jede der drei Maschinen alleine die gesamte Ernte in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also, zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen). Die Maschinen sind aber verschieden leistungsfähig. Maschine A leistet unter ihnen am meisten und D am wenigsten.
Wie viele Tage würde jede der drei Maschinen jeweils alleine benötigen, um die gesamte Ernte am Heidihof einzubringen?

d) Heute soll die Ernte am Mitzihof eingebracht werden. Dazu stehen die vier Maschinen A, B, C und D den ganzen Tag zur Verfügung. Aus Erfahrung weiß man, dass es sich mit diesen vier Maschinen zusammen genau mit einem ganztägigen Einsatz ausgehen wird, alles zu erledigen. Man weiß auch, dass jede der vier Maschinen alleine die gesamte Ernte in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also, zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen). Die Maschinen sind aber jeweils verschieden leistungsfähig. Maschine A würde die ganze Ernte allein in genau 10 Tagen schaffen. Maschine B leistet unter allen Maschinen am meisten und D am wenigsten.

Wie viele Tage würde jede der drei Maschinen B, C und D jeweils alleine benötigen, um die gesamte Ernte am Heidihof einzubringen?

e) In der Koop-Zentrale wird gerade die Einteilung der Geräte für die nächste Woche geplant. Die Chefin diskutiert gerade mit dem Fuhrparkleiter über den Einsatz der Geräte am Grubhof. Sie haben zwar schriftliche Unterlagen aus den letzten Jahren, aber diese sind etwas verwirrend angeschrieben. Sie wissen, dass im Vorjahr Maschine A einen ganzen Tag eingesetzt war, Maschine B zwei volle Tage und Maschine C drei volle Tage. Damit war die ganze Arbeit erledigt. Unter diesen drei Maschinen ist A die leistungsfähigste und C diejenige, die am wenigsten an einem Tag leisten kann. Sie können sich beide daran erinnern, dass jede der drei Maschinen alleine die gesamte Ernte am Grubhof in einer ganzen Zahl von Tagen einbringen könnte (also, zum Beispiel in genau 3 Tagen oder in genau 8 Tagen).

Nun meint der Fuhrparkleiter, dass man aus dieser Information wohl eindeutig ableiten können müsste, wie viele Tage jeder der Maschinen jeweils bei einem Soloeinsatz für die ganze Grubhofernte benötigen würde. Die Chefin glaubt nicht, dass das stimmt. Wer von beiden hat recht?

3.23. Zwei benachbarte Geschäfte verkaufen denselben Artikel zum selben Preis.

a) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$. Das Geschäft B sieht nun eine Chance, und bietet dasselbe Produkt um $\frac{x}{2}\,\%$ verbilligt an. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den Preis also um $x\,\%$, und nach all diesen Preisänderungen sind die Preise in beiden Geschäften wieder gleich. Wie groß ist x?.

b) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$. Das Geschäft B sieht nun eine Chance, und bietet dasselbe Produkt um $\frac{x}{3}\,\%$ verbilligt an. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den Preis also um $x\,\%$, und nach all diesen Preisänderungen sind die Preise in beiden Geschäften wieder gleich. Wie groß ist x?

c) Das Geschäft A erhöht den Preis eines Tages um $x\,\%$, während das Geschäft B die Chance wahrnimmt, um den Preis desselben Produkts um $\frac{x}{3}\,\%$ zu erhöhen. Um konkurrenzfähig zu bleiben, senkt Geschäft A den Preis also darauf um $x\,\%$. Das Geschäft B gleicht dann seinen Preis an den von Geschäft A an, und senkt dazu den Preis um genau $\frac{x}{2}\,\%$. Wie groß ist x?

3.24. In dieser Aufgabe beschäftigen wir uns mit Gleichungen in x und a, die durch Prozentangaben gegeben sind.

a) Eine Zahl a ist um $x\,\%$ größer als 5 und um $x\,\%$ kleiner als 20. Bestimme die Werte von a und x.
b) Eine Zahl a ist um $x\,\%$ größer als die Hälfte von x und um $\frac{x}{2}\,\%$ kleiner als x. Bestimme die Werte von a und x.
c) Es ist bekannt, dass $x\,\%$ von x gleich a ist. Bestimme den Wert von x, wenn
i) $a = 25$ **ii)** $a = 81$ **iii)** $a = \frac{x}{2}$ **iv)** $a = \frac{x}{4}$ **v)** $a = \frac{10}{x}$
gilt.

3.25. Die schlaue Rechenmaschine Plumi-Maldi rechnet gerne lange Rechenketten.

a) Zum Aufwärmen beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $+2$ und -1. Nach einem Schritt kommt sie also auf 2, nach den zweiten auf 1, nach dem dritten auf 3, nach dem vierten auf 2, nach dem fünften auf 4, und so weiter.
Mit dem wievielten Schritt kommt sie zum ersten Mal zur Zahl 15? Mit dem wievielten kommt sie zum ersten Mal zur Zahl 1500?
b) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet dieses Mal in jedem Rechenschritt abwechselnd $+6$ und -4. Sie möchte gerne auf diese Weise die Zahl 85 erreichen.
Entscheide, ob ihr dies gelingen wird. Wenn ja, bestimme im wievielten Schritt es ihr gelingt. Wenn nein, begründe, warum es ihr nicht gelingen wird.
c) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $+6$ und -3. Sie möchte gerne auf diese Art die Zahl 202 erreichen.
Nach einer längeren Rechenkette erkennt sie, dass ihr dies nicht gelingen kann und bricht ab. Warum gelingt ihr das nicht?
d) Wiederum beginnt sie mit der Zahl 0, und rechnet dieses Mal in jedem Rechenschritt abwechselnd $+5$ und -2. Sie möchte gerne auf diese Art aktuelle Jahreszahlen erreichen.
Welche der Jahreszahlen 2018, 2019, 2020 und 2021 wird sie irgendwann erreichen? Welche wird sie nie erreichen? Im wievielten Schritt erreicht sie jeweils die Zahlen, die sie erreichen kann?
e) Nach so vielen plus-minus Rechnungen, versucht sie jetzt etwas Anderes. Sie beginnt mit der Zahl 1, und rechnet in jedem Rechenschritt abwechselnd $\times 10$ und $:5$. Nach einem Schritt kommt sie also auf 10, nach dem zweiten auf 2, nach dem dritten auf 20, nach dem vierten auf 4, nach dem fünften auf 40, und so weiter.
  i) Im wievielten Schritt kommt sie zum ersten Mal auf eine Zahl, die größer als 1000 ist?
  ii) Wie viele der fünf Zahlen 64, 200, 256, 520 und 1280 kann sie auf diese Art erreichen? Begründe deine Antwort.

3.26. Eine Folge

$$\langle a_n \rangle = \langle 1, 6, 4, 9, 7, 12, 10, 15, \ldots \rangle$$

beginnt mit der Zahl $a_1 = 1$. Die nachfolgenden Zahlen erhält man, wenn man abwechselnd zur vorangehenden Zahl 5 dazuzählt bzw. 2 von dieser abzieht.

a) Bestimme die Zahlen a_{2020}, a_{2021} und a_{2022}.

b) Kommen die Zahlen 2020, 2021 bzw. 2022 in der Folge vor? Wenn ja, bestimme jeweils ihre Indizes. Wenn nein, begründe warum sie nicht vorkommen.

3.27. Vor einige Tagen habe ich eine alte Schatzkiste entdeckt und aufgemacht. In der Kiste waren lauter Zahlen und Variable, wie 2, -18, $\frac{3}{4}$, x, a und π. Ich habe damit etwas gespielt und gerechnet. So sind, zum Beispiel die Rechnungen

$$2 \cdot 5 = 10, \quad 2x \cdot (1-x) = 2x - 2x^2, \quad (a+\pi) \cdot (a-\pi) = a^2 - \pi^2$$

entstanden. Dann habe ich aber eine ganz eigenartige „Zahl" mit dem Namen ρ in der Kiste entdeckt. Als ich mit dieser Zahl gerechnet habe, sind folgende Rechnungen entstanden:

$$\rho \cdot \rho = 0, \quad (2+\rho)^2 = 4 + 4\rho, \quad (\rho - 1) \cdot (\rho + 1) = -1, \quad (2x - 3\rho) \cdot \rho = 2\rho x$$

Dies hat mich also dazu inspiriert, mit Ausdrücken der Form $a + b \cdot \rho$ zu experimentieren, wobei a und b jeweils beliebige reelle Zahlen sein können. Ich nenne solche Ausdrücke „*Nullimaginäre Zahlen*".

a) Eine nullimaginäre Zahl $z = a + b \cdot \rho$ mit $b = 0$ ist einfach eine reelle Zahl a. Bestimme jeweils eine nullimaginäre Zahl z mit der Eigenschaft, dass das Ergebnis der Rechnung

- **i)** $(1 - 2 \cdot \rho) + z$
- **ii)** $(1 - 2 \cdot \rho) \cdot z$
- **iii)** $(1 - 2 \cdot \rho) - z$
- **iv)** $(1 - 2 \cdot \rho) : z$

reell ist.

b) Man bezeichnet eine Zahl c als *invers* zu einer reellen Zahl a, wenn $a \cdot c = 1$ gilt. Zur reellen Zahl $a = 0$ gibt es keine inverse Zahl. Zu jeder anderen reellen Zahl a gibt es die inverse Zahl $c = \frac{1}{a}$, denn es gilt für diese Zahl sicher $a \cdot c = a \cdot \frac{1}{a} = 1$.

Ich würde auch gerne inverse Zahlen zu meine nullimaginären Zahlen finden. Ich hätte also gerne zu einer gegebenen Zahl $z = a + b \cdot \rho$ eine Antwort auf folgende Fragen:

- **i)** Wie sieht im Allgemeinen eine inverse Zahl zu $z = a + b \cdot \rho$ aus? Mit anderen Worten, wie hängen die Zahlen c und d mit den gegebenen Zahlen a und b zusammen, wenn $(a + b \cdot \rho) \cdot (c + d \cdot \rho) = 1$ gilt?
- **ii)** Gibt es Werte für a und b, sodass es keine inverse Zahl zu z gibt?

4. Weitere Denksportaufgaben

Stufe I.

4.1. Die Familie Knödl liebt Zwetschkenknödel. Gestern aßen sie wieder welche zu Mittag. Alle drei Kinder haben gleich viele Knödel gegessen, und Mama so viele wie alle Kinder zusammen. Papa Knödl hat mehr als Mama Knödl gegessen, aber weniger als die Hälfte aller Knödel. Zusammen haben sie 19 Zwetschkenknödel verspeist. Wie viele hat jeder von ihnen gegessen?

4.2. In einem *magischen Quadrat* ist die Summe der Zahlen in jeder Zeile, jeder Spalte und jeder der beiden Diagonalen gleich groß (die *magische Konstante*). Ein Beispiel sehen wir hier abgebildet:

6	1	8
7	5	3
2	9	4

Die magische Konstante in diesem magischen Quadrat ist 15.

a) In einem anderen magischen Quadrat kennen wir nur drei Zahlen

X	5	X
17	X	X
3	X	X

  i) Wie lauten die übrigen Zahlen in diesem magischen Quadrat?
  ii) Wie lautet seine magische Konstante?

b) In einem anderen magischen Quadrat sollen nur ganze Zahlen mit Beträgen von höchstens 1 vorkommen, wobei nicht alle Zahlen gleich sein dürfen. Bestimme ein derartiges magisches Quadrat.

c) In einem anderen magischen Quadrat sollen alle drei Zahlen in einer Diagonale gleich einer vorgegebenen Zahl $x \neq 0$ sein, während sich in einem Eckfeld die Zahl $y \neq x$ befindet. Bestimme die Zahlen in den anderen Feldern des magischen Quadrats in Abhängigkeit von x und y, sowie die magische Konstante S des magischen Quadrats.

d) In einem magischen Quadrat sollen die Zahlen in den vier Eckfeldern, ebenso wie im Beispiel oben, im Verhältnis $x : a : b : c = 1 : 2 : 3 : 4$ stehen. Zeige, dass es für jede beliebige Wahl der Zahl $m \in \mathbb{R}$ im mittleren Feld ein magisches Quadrat mit dieser Eigenschaft gibt. Wie hängt die magische Konstante vom Wert von m ab?

e) In einem anderen magischen Quadrat sollen die Zahlen ($\neq 0$) in den vier Eckfeldern im Verhältnis $1 : 2 : 3 : 5$ stehen. Zeige, dass es kein magisches Quadrat mit dieser Eigenschaft geben kann.

4.3. Wenn Jordan im Jahr 2020 Geburtstag feiert, ist Jordan so alt wie die Summe der Ziffern des Geburtsjahrs. Wenn Jules im Jahr 2021 Geburtstag feiert, geht es Jules genauso.
In welchen Jahren sind die beiden geboren?

4.4. Es ist bekannt, dass eine Uhr, deren Minuten- und Stundenzeiger beide stillstehen, zwei Mal am Tag die richtige Zeit angibt.

a) Wie oft gibt eine Uhr am Tag die richtige Zeit an, wenn der Minutenzeiger still steht, aber der Stundenzeiger richtig läuft?
b) Wie oft gibt eine Uhr am Tag die richtige Zeit an, wenn der Stundenzeiger still steht, aber der Minutenzeiger richtig läuft?

4.5. Eine Magierin stellt dem Publikum den folgenden Zahlentrick vor. Sie sagt: „Denken Sie sich eine positive, ganze Zahl. Multiplizieren Sie die Zahl mit 3 und addieren Sie zum Ergebnis 2. Anschließend ziehen Sie die Zahl 13 ab und addieren dann wiederum die erdachte Zahl. Nennen Sie mir das Ergebnis und ich nenne Ihnen Ihre Zahl."

a) Eine Person aus dem Publikum denkt sich die Zahl 7, eine andere die Zahl 10. Welche Zahlen erhalten sie jeweils als Ergebnis?
b) Eine andere Person denkt sich ihre Lieblingszahl und erhält 153 als Ergebnis. Wie lautet die Lieblingszahl?
c) Eine weitere Person erhält 135 als Ergebnis. Begründe, warum die Person sich verrechnet haben muss.
d) Kannst du beschreiben, wie die Magierin die erdachte Zahl ganz schnell bestimmen kann?
e) Eine andere Person wählt als Startzahl ihr Alter und erhält eine Zahl, die aus lauter gleichen Ziffern besteht. Wie alt ist die Person?
f) Erfinde einen ähnlichen Zaubertrick.

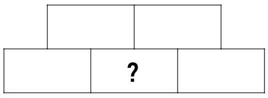
4.6. In Robins Schublade liegen 4 rote, 5 blaue und 6 grüne Socken, die beliebig kombiniert werden können. Heute möchte Robin einen roten und einen grünen Socken tragen und nimmt jeweils einen Socken aus dem Schrank (ohne bereits gezogene wieder zurückzulegen), bis die gewünschte Farbkombination gezogen wurde. Dann sagt Robin: „*Heute hatte ich ja großes Pech. Noch mehr Socken zu nehmen wäre mit Sicherheit nicht nötig gewesen.*"

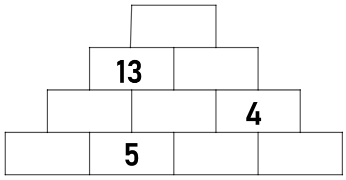
Wie viele Socken hat Robin aus der Schublade genommen?

4.7. Jeder unserer Bausteine ist mit einer positiven Zahl beschriftet und keine zwei Bausteine mit derselben Zahl. Wir bauen damit Pyramiden nach folgender Regel: Auf zwei in einer Ebene nebeneinanderliegenden Steinen liegt immer ein Stein, der mit der Summe der beiden Zahlen auf den beiden Steine beschriftet ist.

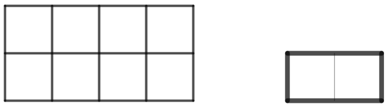
a) Die Steine der Pyramide der linken Abbildung sind mit den Zahlen 1 bis 5 beschriftet.
Welche Werte kann der mit „?“ markierte Stein haben?

b) Diesmal verwenden wir zehn Steine, wie in der rechten Abbildung sehen ist. Bei drei Steinen weißt du schon mit welcher Zahl sie beschriftet sind.
Welcher Stein liegt ganz oben?





4.8. Auf wie viele verschiedene Arten kann man ein 2 × 4-Schachbrett mit vier 1 × 2-Dominos vollständig belegen?



Bestimme alle möglichen Belegungen und begründe, warum es keine weiteren geben kann.

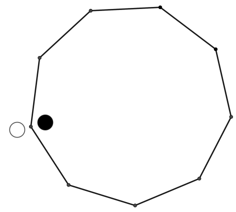
4.9. Zur Fußballweltmeisterschaft sammle ich Spieler-Sticker. Meine Oma hat mir eine volle Schachtel geschenkt. Wenn sie mir drei solcher Schachteln geschenkt hätte, hätte ich vier Mal so viele Sticker wie ich hätte, wenn ich jetzt 12 Sticker aus meiner Schachtel herschenken würde. Wie viele Sticker sind in einer Schachtel?

4.10. Bei einem Obsttransport werden Äpfel und Birnen in fünf Kisten verpackt. In jeder Kiste befinden sich entweder nur Äpfel oder nur Birnen, und die Stückzahl Obst pro Kiste ist der Reihe nach 100, 105, 110, 115 und 130. Unterwegs ist eine Kiste irgendwie abhanden gekommen, wahrscheinlich vom Lastwagen gefallen, man weiß es nicht genau. Jedenfalls gibt es in den verbleibenden vier Kisten zusammen genau drei Mal so viele Äpfel wie Birnen.
Wie viel Stück Obst waren in der Kiste, die unterwegs verloren gegangen ist?

4.11. Alex, Bernie und Charlie laufen ein 5 km Rennen. Charlie gewinnt, mit 500 m Vorsprung auf Alex und 725 m Vorsprung auf Bernie. Wie viel Vorsprung wird Alex an der Ziellinie vor Bernie haben, wenn beide mit gleicher konstanter Geschwindigkeit weiterlaufen?

4.12. Schwarz und Weiß spielen in den Eckpunkten eines Neunecks ein Spiel.

Sie beginnen, wie in der Figur zu sehen, mit ihren Spielfiguren in einem gemeinsamen Eckpunkt des Neunecks. In jeden Zug zieht Schwarz um zwei Ecken weiter gegen den Uhrzeigersinn, während Weiß um drei Ecken im Uhrzeigersinn weiter zieht.



Nach wie vielen Zügen befinden sie sich erstmals wieder im selben Eck des Neunecks?

4.13. Ich möchte sieben gleich große Schnitzel in einer Pfanne braten, auf der nur jeweils vier Platz haben. Damit die Schnitzel schön knusprig sind, muss ich sie auf jeder Seite vier Minuten braten. Ich kann die Schnitzel während der Bratzeit so oft wenden oder austauschen, wie ich möchte, und die Zeit, die beim Wenden und Tauschen vergeht ist nur ganz kurz.
Wie lange brauche ich mindestens, um alle sieben Schnitzel zu braten?

4.14. Wie viele zweiziffrige Zahlen gibt es, deren Zehnerziffern größer als ihre Einerziffern sind?

4.15.

a) Ulli hat eine Rechnung auf die Tafel geschrieben, aber sie ist irrtümlich gelöscht worden. Nun soll die Rechnung wiederhergestellt werden. Ulli kann sich erinnern, dass es eine Subtraktion war, bei der eine zweiziffrige Zahl von einer dreiziffrigen abgezogen wurde. Das Ergebnis der Rechnung weiß Ulli auch noch: es war 240. Wie viele mögliche Rechnungen muss Ulli höchstens durchprobieren, bis die richtige gefunden werden kann?

b) Quinn ist etwas Ähnliches passiert. Quinn hat auch eine Rechnung auf die Tafel geschrieben, und auch diese ist irrtümlich gelöscht worden. Auch diese Rechnung soll wiederhergestellt werden. Quinn kann sich erinnern, dass es eine Subtraktion war, bei der eine dreiziffrige Zahl von einer dreiziffrigen abgezogen wurde. Das Ergebnis ihrer Rechnung war aber auch 240. Wie viele mögliche Rechnungen muss Quinn höchstens durchprobieren, bis die richtige gefunden werden kann?

4.16. Eine Firma liefert eine Kiste mit 240 bunten Gartenstangen. Jede Stange hat vier Farbstreifen; je eine rote, eine blaue, eine gelbe und eine violette. Es ist die Aufgabe eines Firmenangestellten zu überprüfen, ob die Farbstreifen jeweils in Ordnung sind, und leider stellt er fest, dass es viele fehlerhafte Farbstreifen gibt. Er notiert, dass es genau 190 Stangen mit einwandfreien roten Streifen gibt, 187 mit einwandfreien blauen Streifen, 182 mit einwandfreien gelben und 177 mit einwandfreien violetten. Nun benötigt die Chefin aber Stangen mit vier einwandfreien Farbstreifen.
Wie viele geeignete Stangen gibt es in der Kiste mindestens?

4.17. Ich habe 11 Kugeln, die fortlaufend mit den Zahlen 1, 2, 3, …, 10 und 11 nummeriert sind. Ich möchte sie so in zwei Schüsseln legen, dass sich vier in der linken Schüssel befinden und sieben in der rechten. Die Summen der Zahlen in den Schüsseln sollen jeweils gleich sein. Bestimme alle Möglichkeiten die ich habe, die Kugeln so in die Schüsseln zu legen.

4.18. In die Felder einer 4×4 Tabelle sollen Zahlen geschrieben werden. Zwei Zahlen in Feldern mit gemeinsamer Seite sollen sich immer um genau 1 unterscheiden. Man weiß, dass die Zahlen 4 und 10 jeweils in Eckfeldern der Tabelle vorkommen. Wie viele verschiedene Zahlen können in der vollständig ausgefüllten Tabelle stehen? Wie kann so eine ausgefüllte Tabelle aussehen?

4.19. In jedes Feld der gegebenen 5×5 Tabelle soll jeweils eine einziffrige Primzahl geschrieben werden.

Einige Zahlen sind in der obersten Zeile bereits eingetragen. Es dürfen die Zahlen in angrenzenden Feldern (solche, die entweder eine gemeinsame Seite oder einen gemeinsamen Eckpunkt haben) niemals gleich sein. Bestimme alle möglichen Kombinationen von fünf Zahlen, die in der letzten Zeile stehen können.

2	3		5	7

4.20. Wir schalten Lampen an und aus. Man kann auf eine Lampe drücken, und dies schaltet die Lampe ein, wenn sie davor ausgeschaltet war, und aus, wenn sie davor eingeschaltet war. Drückt man aber auf eine Lampe, wechselt auch der Leuchtzustand der beiden Nachbarlampen. Ist eine Lampe an, so schreiben wir „1“, ist sie aus, so schreiben wir „0“.

a) Auf einem Brett sind einige Lampen in einer Reihe montiert. (Drückt man auf eine Lampe am Rand, so ändert sich der Leuchtzsutand der Lampe selbst und des einen Nachbarn.)

- **i)** In einer Reihe von 5 Lampen sind die Lampen im Zustand 1 0 1 0 1. Bestimme eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen einschalten kann.
- **ii)** In einer Reihe von 6 Lampen sind die Lampen im Zustand 1 0 1 0 1 0. Bestimme eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen einschalten kann.

b) Auf einem anderen Brett sind einige Lampen im Kreis montiert.

- **i)** In einem Kreis von 6 Lampen sind die Lampen zunächst abwechselnd an und aus. Bestimme eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen ausschalten kann.
- **ii)** In einem Kreis von 8 Lampen sind die Lampen zunächst abwechselnd an und aus. Bestimme eine Reihenfolge von Operationen, mit der man alle Lampen ausschalten kann.

4.21. Von Mitternacht (00:00) bis Mitternacht eines Tages (wieder 00:00) vergehen 24 Stunden.

a) Wie spät ist es, wenn bis Ende des Tages noch genau halb so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

b) Wie spät ist es, wenn noch genau ein Drittel so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

c) Wie spät ist es, wenn noch genau ein Viertel so viel Zeit verbleibt, wie schon an dem Tag vergangen ist?

Stufe II.

4.22. Wir haben drei Dominosteine vor uns liegen: Einer besitzt 1 bzw. 2, der zweite 2 bzw. 3 und der dritte 3 bzw. 4 Punkte. Wir legen diese Steine nach folgenden Regeln auf:

(i) Zwei Dominosteine berühren einander bei maximal einer Kante.

(ii) Berühren einander zwei Dominosteine so haben sie im Feld, das zur berührenden Kante gehört, jeweils die gleiche Anzahl an Punkten.

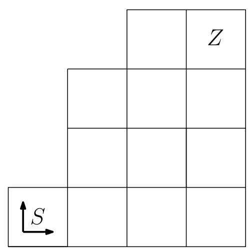
(iii) Jeder Dominostein berührt mindestens einen anderen Dominostein.

Der Stein mit 1 und 2 Punkten liegt bereits vor uns.
Wie viele Möglichkeiten gibt es jetzt die anderen beiden Steine dazu zu legen, sodass die Regeln erfüllt sind?

4.23. In dieser Aufgabe widmen wir uns dem Zählen von Wegen.

a) Wie viele verschiedene Wege führen vom Feld S (Start) zum Feld Z (Ziel), wenn man nur in den beiden Pfeilrichtungen entlang der Felder gehen darf?

b) Du darfst ein beliebiges Feld hinzufügen, das Startfeld und Zielfeld bleiben jedoch gleich. Finde heraus, wo du das Feld hinzufügen solltest, damit es möglichst viele Wege von S nach Z gibt.



4.24. Lesen macht Freu(n)de.

F	R	E	U
R	E	U	N
E	U	N	D
U	N	D	E

M	A	C	H	T	F
A	C	H	T	F	R
C	H	T	F	R	E
H	T	F	R	E	U
T	F	R	E	U	D
F	R	E	U	D	E

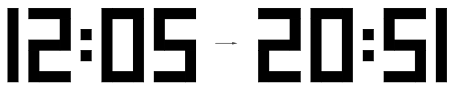
a) Auf wie viele Arten kannst du in der linken Tabelle das Wort „Freunde“ lesen, wenn du keine Zeile oder Spalte übrspringst?

b) Auf wie viel Arten kannst du in der Tabelle „Macht Freude“ lesen, wenn du dabei keine Zeile oder Spalte überspringst?

4.25. Eine Digitaluhr zeigt die Zeit 35 Minuten nach 11 in der Form 11:35 an. Diese Zeit kann als Division gelesen werden, also als 11 dividiert durch 35. Manche Zeitpunkte haben die Eigenschaft dass die angezeigte Division ohne Rest aufgeht. Beispiele dafür sind 20:10 (da $20 : 10 = 2$ gilt) und 06:01 (da $6 : 1 = 6$ gilt). Einen derartigen Zeitpunkt bezeichnen wir als *teilbare Zeit*.

a) Gibt es am Vormittag (also von 00:00 bis 11:59) mehr teilbare Zeiten oder am Nachmittag (also von 12:00 bis 23:59)?

b) Betrachten wir die Uhr im Spiegel, erscheinen die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge.
Manche Ziffern (0, 1 und 8) sehen im Spiegel gleich aus. Manche werden vertauscht (2 erscheint als 5 und 5 als 2). Die übrigen Ziffern (3, 4, 6, 7 und 9) ergeben im Spiegelbild keinen Sinn.

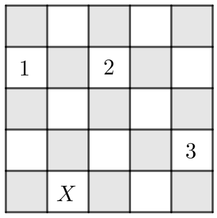


Bestimme eine teilbare Zeit, die im Spiegel gleich erscheint wie bei direkter Betrachtung.

c) Bestimme ferner eine teilbare Zeit, die im Spiegel als eine andere teilbare Zeit erscheint.

d) Wir können die Division auch verkehrt herum lesen, also den Zeitpunkt 11:35 als 35 dividiert durch 11. Geht eine solche Division ohne Rest auf, bezeichnen wir den Zeitpunkt als *vielfache Zeit*.
Nun gibt es sicher Zeitpunkte, die teilbar sind, und deren Spiegelbilder vielfach sind, nämlich Zeiten wie 21:21 mit gleicher Stunden- und Minutenzahl, deren Spiegelbilder sinnvolle Zeiten ergeben (in diesem Fall 15:15). Gibt es auch eine teilbare Zeit, deren Spiegelbild vielfach ist, für die dies nicht gilt?

4.26. Auf einem $n \times n$ Schachbrett gibt es eine Spielfigur mit dem Namen „*Super Springer*". Diese Figur macht jeweils L-förmige Spielzüge und geht mit jedem Zug in einer Richtung waagrecht oder senkrecht 3 Felder weiter, und gleichzeitig um ein Feld im rechten Winkel dazu. Im Bild sehen wir, dass er z.B. auf einem 5×5 Schachbrett vom Feld, das mit den X markiert ist, wahlweise auf die Felder 1, 2 oder 3 ziehen kann (und sonst nirgends).



a) Begründe, warum ein Super Springer, der vom linken, unteren Feld eines 5×5 Schachbretts beginnt, nicht alle Felder des Schachbretts besuchen kann, egal wie viele Züge er hintereinander machen darf. Wie viele der 25 Felder des Schachbretts kann er irgendwann erreichen?

b) Auf einem 4×4 Schachbrett sollen so viele Super Springer wie möglich aufgestellt werden, sodass keine zwei von ihnen einander angreifen. (Mit anderen Worten, keine Figur soll auf einem Feld stehen, die in einem Zug von einer anderen aufgestellten Figur erreicht werden kann.) Wie viele Super Springer können höchstens auf dem Brett aufgestellt werden? Warum ist es sicher nicht möglich, mehr aufzustellen?

c) Wir bezeichnen die Felder auf dem Weg (inklusive Ausgangsfeld), den ein Super Springer von einem vorgegebenen Feld aus erreichen kann, als einen *Super-S Weg*. Bestimme die Anzahl der Super-S Wege auf einem

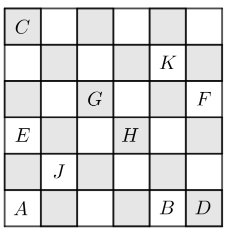
i) 4×4 Schachbrett, **ii)** 5×5 Schachbrett, **iii)** 6×6 Schachbrett.

d) Ein Super Springer steht in der Mitte eines 15×15 Schachbretts und führt hintereinander zwei Züge aus. Wie viele verschiedene Felder kann die Figur im zweiten Zug erreichen?

e) Ein Super Springer macht auf dem Schabrett mehrere Züge hintereinander und erreicht irgendwann zum ersten Mal wieder ein Feld, auf dem er schon im Verlauf seiner Zugfolge schon einmal gestanden ist. Wir sagen, er hat dann einen *Super-S Kreis* gemacht. Wie viele Felder kann er maximal im Verlauf eines Super-S Kreises besuchen, wenn er sich auf einem

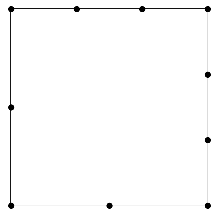
i) 4×4 Schachbrett **ii)** 5×5 Schachbrett bewegt?

f) Bestimme in folgender Figur jeweils die kleinste Anzahl von Zügen, die notwendig sind um von **i)** A zu B, **ii)** C zu D, **iii)** E zu F, **iv)** G zu H, **v)** J zu K zu gelangen.



4.27. Auf einem Blatt Papier sind sechs Punkte gegeben, die so platziert sind, dass keiner der Punkte auf einer Geraden mit zwei anderen Punkten liegt. Man verbindet diese Punkte mit einem grünen oder einem roten Stift. Zwei Spieler A und B machen das nacheinander, bis alle Punkte miteinander verbunden sind. Sie dürfen beide Farben benutzen. Spieler A beginnt und möchte, dass auf der Ebene ein rotes oder ein grünes Dreieck erscheint, B will das verhindern.
Begründe, warum B immer verliert.

4.28. Die Zahlen 1, 2 . . . , 10 sollen so auf die markierten Punkte des Quadrats verteilt werden, dass die Summe S auf jeder Seite gleich ist.



a) An den Ecken stehen die vier Zahlen 3, 4, 6 und 8. Bestimme S und gib eine Verteilung der restlichen Zahlen auf die markierten Punkte an, sodass die Bedingung erfüllt ist.

b) Bestimme eine Verteilung der 10 Zahlen, sodass $S = 20$ gilt.

c) Bestimme den größtmöglichen Wert für S.

d) Bestimme den kleinstmöglichen Wert für S.